

No.1 固有値と固有ベクトル

この回のゴール

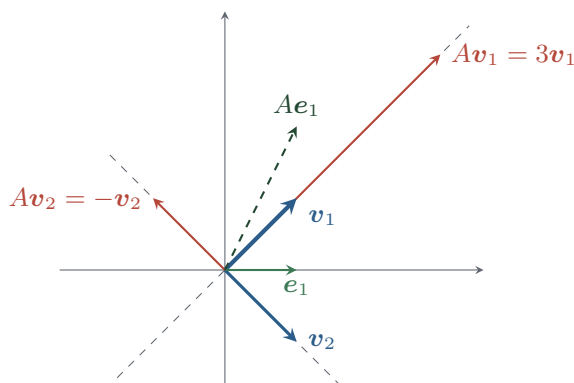
- 固有値・固有ベクトルの定義を述べ、与えられたベクトルが固有ベクトルかどうか判定できる。
- 固有ベクトルの図形的な意味（向きが変わらない方向）を説明できる。
- 固有空間が部分空間であることを示し、その基底を求められる。
- 「異なる固有値に対する固有ベクトルは 1 次独立」を証明できる。

■ 1. 向きが変わらないベクトル

第 5 章 No.4 例題 3 で、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ は基底 $\mathbf{v}_1 = {}^t(1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = {}^t(1, -1)$ に関して対角行列 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で表された。その理由は

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{v}_2$$

となっていたからである。 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は、 A を掛けても向きが変わらず（または逆向きになるだけで）、長さが定数倍されるだけである。



一方 $\mathbf{e}_1$ は $A\mathbf{e}_1 = {}^t(1, 2)$ に移り、向きが変わってしまう。線形変換を理解するには、まず「向きが変わらない方向」を見つけるのがよい。

■ 2. 固有値と固有ベクトル

定義 1 固有値・固有ベクトル

A を n 次正方行列とする。実数 λ と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ が

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

を満たすとき、 λ を A の固有値、 $\mathbf{v}$ を固有値 λ に対する固有ベクトルという。同様に、線形変換 $f: V \rightarrow V$ について $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) となるとき、 λ を f の固有値、 $\mathbf{v}$ を固有ベクトルという。

注意

- 固有ベクトルは $\mathbf{0}$ でないことが条件. $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ はどんな λ でも成り立つので, $\mathbf{0}$ を許すと意味がなくなる.
- 一方, 固有値が 0 になることはある. $A\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) という事.
- $\mathbf{v}$ が固有ベクトルなら, $c\mathbf{v}$ ($c \neq 0$) も同じ固有値の固有ベクトル. 固有ベクトルは「方向」が大事で, 長さは自由に選べる.
- この講座では, 固有値は実数の範囲で考える (複素数まで広げることもある. No.2 で触れる).

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次のベクトルが固有ベクトルかどうか調べ, 固有ベクトルなら固有値を答えよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

【解答】 (1) $A^t(1, 1, 1) = {}^t(4, 4, 4) = 4^t(1, 1, 1)$. 固有値 4 の固有ベクトル.

(2) $A^t(1, -1, 0) = {}^t(1, -1, 0)$. 固有値 1 の固有ベクトル.

(3) $A^t(1, 2, 3) = {}^t(7, 8, 9)$. これは ${}^t(1, 2, 3)$ の定数倍でない ($7/1 \neq 8/2$) ので, 固有ベクトルではない.

■ 3. 図形で見る固有値

例 1 $\mathbb{R}^2$ の線形変換

- (a) 直線 $y = x$ に関する対称移動 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: 直線 $y = x$ 上のベクトル ${}^t(1, 1)$ はそのまま (固有値 1), 直線 $y = -x$ 上のベクトル ${}^t(1, -1)$ は逆向き (固有値 -1).
- (b) x 軸への正射影 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\mathbf{e}_1$ はそのまま (固有値 1), $\mathbf{e}_2$ は $\mathbf{0}$ に移る (固有値 0).
- (c) 原点のまわりの 90° 回転: どのベクトルも向きが変わるので, 実数の固有値をもたない.

コラム: 関数の固有ベクトル

関数の空間で微分 $D(f) = f'$ を考えると, $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ なので, 指数関数 $e^{\lambda x}$ は D の固有値 λ の固有ベクトルである. 微分方程式 $y' = ay$ や $y'' - 3y' + 2y = 0$ を解くときに $e^{\lambda x}$ の形の解を探すのは, 「微分の固有ベクトルを探している」ことにあたる (分野「微分方程式」第 3 章 No.1).

■ 4. 固有空間

定理 1 固有値の言い換え

n 次正方行列 A と実数 λ について,

$$\lambda \text{ が } A \text{ の固有値} \iff \text{Ker}(A - \lambda E) \neq \{0\} \iff A - \lambda E \text{ は正則でない.}$$

このとき, 固有値 λ の固有ベクトルは $\text{Ker}(A - \lambda E)$ の 0 以外の要素である.

【証明】 $Av = \lambda v \iff Av - \lambda Ev = 0 \iff (A - \lambda E)v = 0$. よって固有ベクトルとは, 同次方程式 $(A - \lambda E)x = 0$ の自明でない解のことである. 自明でない解が存在する $\iff A - \lambda E$ が正則でない (第 2 章 No.3 定理 5). $\square$

定義 2 固有空間

λ を A の固有値とすると,

$$W(\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda E) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v\}$$

を固有値 λ に対する**固有空間**という. 固有値 λ の固有ベクトル全体に 0 を加えたものである.

$W(\lambda)$ は解空間 (核) なので, $\mathbb{R}^n$ の部分空間である (第 4 章 No.4 定理 2). 特に, 固有空間の基底は同次方程式の基本解として求められる.

例題 2

例題 1 の A について, 固有空間 $W(1)$ の基底と次元を求めよ.

【解答】 $A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を簡約すると第 1 行 $(1, 1, 1)$, 第 2・3 行は零行. $(A - E)x = 0$ は $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ だけになり, $x_2 = s$, $x_3 = t$ とおくと

$$x = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

基底は ${}^t(-1, 1, 0)$, ${}^t(-1, 0, 1)$ で, $\dim W(1) = 2$. (例題 1 (2) の ${}^t(1, -1, 0)$ も $W(1)$ に入っている. $W(1)$ は平面 $x + y + z = 0$ である.)

定理 2 固有値 0

A が固有値 0 をもつ $\iff A$ は正則でない.

【証明】 定理 1 で $\lambda = 0$ とすればよい. ($W(0) = \text{Ker } A$ である.) $\square$

■ 5. 異なる固有値の固有ベクトルは 1 次独立

定理 3

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ を A の相異なる固有値とし, $\mathbf{v}_i$ を λ_i に対する固有ベクトルとする. このとき $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ は 1 次独立である.

【証明】 k に関する帰納法で示す. $k = 1$ のときは $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ より正しい. $k - 1$ 本までで正しいとし,

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad (1)$$

とする. 両辺に A を掛けると, $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ より

$$c_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \quad (2)$$

(2) - $\lambda_k \times$ (1) を計算すると, $\mathbf{v}_k$ の項が消えて

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k) \mathbf{v}_1 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

帰納法の仮定より $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ は 1 次独立なので, $c_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$. 固有値は相異なるので $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ で, $c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$. すると (1) は $c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ となり, $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ より $c_k = 0$. $\square$

注意

証明の工夫は「 A を掛けた式」と「 λ_k 倍した式」を引いて, 1 本ずつベクトルを消していくところにある. この定理から, n 次正方行列の相異なる固有値は高々 n 個であることも分かる (第 4 章 No.2 定理 5 (3)). No.3 で対角化の条件を考えると中心的な役割を果たす.

■ 練習問題

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, ${}^t(1, 1)$ と ${}^t(1, -2)$ が固有ベクトルであることを確かめ, それぞれの固有値を求めよ. また ${}^t(1, 0)$ は固有ベクトルか.
- $\mathbb{R}^2$ の次の線形変換の固有値と固有ベクトルを, 図形的に考えて求めよ.
 - x 軸に関する対称移動
 - すべてのベクトルを 3 倍する変換 ($3E$)
 - 原点のまわりの 180° 回転
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ について, 3 が固有値であることを示し, 固有空間 $W(3)$ の基底と次元を求めよ.
- λ を A の固有値, $\mathbf{v}$ をその固有ベクトルとする. 次を示せ.
 - 自然数 k について, $\mathbf{v}$ は A^k の固有値 λ^k の固有ベクトルである.
 - A が正則なら $\lambda \neq 0$ で, $\mathbf{v}$ は A^{-1} の固有値 $\frac{1}{\lambda}$ の固有ベクトルである.
- $A^2 = A$ を満たす正方行列 A の固有値は 0 か 1 しかないことを示せ.
- (考えてみよう) 微分 $D: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ の固有値と固有空間をすべて求めよ. (ヒント: $f \neq 0$ で $f' = \lambda f$ とすると, 両辺の次数を比べる.)

■ 練習問題の解答

1. $A^t(1, 1) = {}^t(5, 5) = 5{}^t(1, 1)$ (固有値 5), $A^t(1, -2) = {}^t(2, -4) = 2{}^t(1, -2)$ (固有値 2). $A^t(1, 0) = {}^t(4, 2)$ は ${}^t(1, 0)$ の定数倍でないで、固有ベクトルでない.
2. (1) x 軸上の e_1 はそのまま (固有値 1), y 軸上の e_2 は逆向き (固有値 -1). (2) $\mathbf{0}$ 以外のすべてのベクトルが固有値 3 の固有ベクトル. $W(3) = \mathbb{R}^2$. (3) すべてのベクトルが逆向きになるので, $\mathbf{0}$ 以外のすべてのベクトルが固有値 -1 の固有ベクトル.
3. $A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は正則でないで、定理 1 より 3 は固有値. $(A - 3E)x = \mathbf{0}$ は $x_2 = 0$ なので, $W(3) = \langle e_1 \rangle$, 次元 1.
4. (1) $A^2v = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v$. くり返して $A^k v = \lambda^k v$. (2) 定理 2 より $\lambda \neq 0$. $Av = \lambda v$ の両辺に左から A^{-1} を掛けて $v = \lambda A^{-1}v$, よって $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$.
5. 固有値 λ , 固有ベクトル v をとる. 練習問題 4 (1) より $A^2v = \lambda^2 v$. 一方 $A^2v = Av = \lambda v$. よって $(\lambda^2 - \lambda)v = \mathbf{0}$ で, $v \neq \mathbf{0}$ より $\lambda^2 = \lambda$, つまり $\lambda = 0$ または 1.
6. $f \neq 0$, $f' = \lambda f$ とする. $\lambda \neq 0$ なら, f の次数を d とすると左辺 f' の次数は d より小さい (または $f' = 0$) が, 右辺 λf の次数は d で, 矛盾. よって $\lambda = 0$ で, $f' = 0$ から f は定数. 固有値は 0 だけで, 固有空間は $W(0) = \langle 1 \rangle$ (定数全体). (第 5 章 No.4 練習問題 1 の表現行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ でも同じ結果が確かめられる.)